considera como muestra grande. De todas formas el procedimiento y cálculo será igual, conociendo o no la varianza o la desviación típica poblacional.

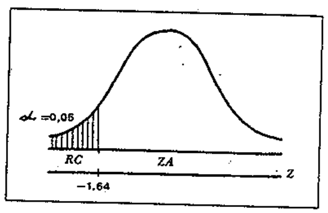
Distribución de medias ($\bar{x}$)

Veamos algunos ejemplos, cuando se conoce la varianza poblacional y cuando es desconocida. Como orientación en este último caso, por lo general, después de señalar el tamaño de la muestra, y su media, vendrá la identificación de la desviación típica, evitando que se confunda la desviación o la varianza poblacional con la de la muestra.

Ejemplos

1. Un inspector de calidad investiga las acusaciones contra una embotelladora por su deficiente llenado que debe ser, en promedio, de 32,5 onzas. Para ello toma una muestra de 60 botellas, encontrando que el contenido medio es de 31,9 onzas de líquido. Se sabe que la máquina embotelladora debe producir un llenado con una desviación típica de 3,6 onzas. ¿Puede el inspector llegar a la conclusión, a un nivel de significación del 5%, que se están llenando las botellas por debajo de su especificación de contenido?

Solución: $\mu = 32,5$ $\quad \sigma = 3,6$ $\quad n = 60$ $\quad \bar{x} = 31,9$



a) $H_0 : \mu = 32,5$
$H_a : \mu < 32,5$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

b) $\alpha = 0,05$ $\qquad$ c) $\sigma = 3,6$

$$Z = \frac{31,9 - 32,5}{3,6 / \sqrt{60}} = -1,29$$

Como −1,29 se sitúa en la zona de aceptación, es válida la hipótesis nula, lo cual significa que el inspector no debe llegar a la conclusión de que se está llenando y vendiendo un producto por debajo de su especificación, al nivel del 5%.

2. Un proceso está programado para empacar la cantidad, media, de una libra (16 onzas) de café. Se toma una muestra aleatoria de 36 paquetes; resulta una media de 14,2 onzas y desviación típica de 5,3 onzas. Al nivel del 5%, ¿se podrá afirmar que no se está cumpliendo con lo indicado en el empaque?

Solución: Observe que no se está diciendo que está por debajo de lo establecido, ya que la media podría ser cualquier valor. En este caso la prueba es bilateral.

$\mu = 16$ $\quad n = 36$ $\quad \bar{x} = 14,2$ $\quad s = 5,3$

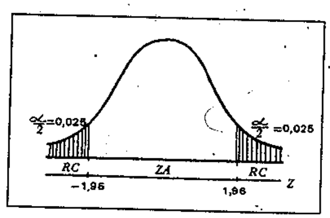
a) $H_0 : \mu = 16$
$H_a : \mu \neq 16$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

b) $\alpha = 0,05$

c) $s = 5,3$

$$Z = \frac{14,2 - 16}{5,3 / \sqrt{36}} = -2,03$$



Al nivel del 5% sí se podrá afirmar que no se está cumpliendo con lo indicado por la fábrica. Se puede ver que −2,03 se ubica en la región crítica, por lo tanto se estará rechazando la hipótesis nula, y aceptando la hipótesis alternativa.

Ejercicios resueltos

1. De la «población normal» constituida por 500 fichas, que se encuentran en una urna en la oficina administrativa del CIENES, se extrajo una muestra de 16 observaciones:

62 43 60 49 72 56 45 46 37 56 41 43 36 46 56 49

Se sabe que la desviación estándar poblacional es de 10, pero es desconocida la media poblacional (μ= 50 verdadera). Cometiendo un riesgo alfa (nivel de significación) del 5%, docimar ó probar la hipótesis de que la media poblacional sea igual: a) 40, b) 49, c) 50, d) 51, y e) 60.

Observación: Se trata de un ejercicio relativo a dócimas ó pruebas bilaterales.

Como se conoce la media poblacional verdadera, se puede comprobar si la decisión adoptada es correcta o no. En efecto, para cada uno de los 5 casos anteriores establecer si la decisión es correcta y en caso contrario indicar el tipo de error cometido.

La intención de este ejercicio es mostrar que a medida que la media poblacional hipotética se aproxima a la media poblacional verdadera se comete error tipo II.

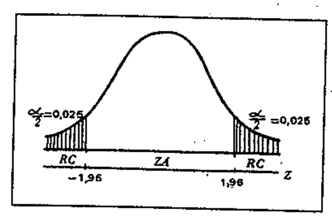
Solución:

(1) a) $H_0 : \mu = 40$ $\qquad$ b) $\alpha = 0,05$ $\qquad$ $\bar{x} = \frac{796}{16} = 49,75$
$H_a : \mu \neq 40$ $\qquad$ c) $\sigma = 10$

d) $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{49,75 - 40}{10 / \sqrt{16}} = 3,9$

$A(0,4750) \rightarrow Z = 1,96$

e) $Z_s \geq 1,96$ $\qquad Z_i \leq -1,96$



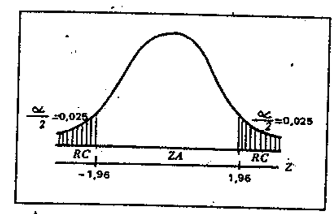
f) $Z = 3,9$ cae en la región crítica ($Z_s > 1,96$) por tal motivo se rechaza la hipótesis de que $\mu = 40$, sabiendo que la media verdadera $\mu = 50$, estamos rechazando algo falso, por lo tanto no hay error.

(2) a) $H_0 : \mu = 49$ $\qquad$ b) $\alpha = 0,05$
$H_a : \mu \neq 49$ $\qquad$ c) $\sigma = 10$

d) $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{49,75 - 49}{10 / \sqrt{16}} = 0,30$

$0,5000 - 0,0250 = 0,4750$

$A(0,4750) \rightarrow Z = 1,96$

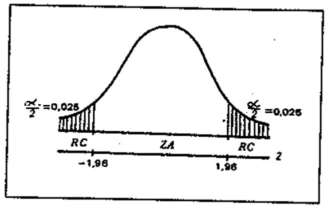


Siendo Z = 0,30 cae en la zona de aceptación, es decir, que aceptamos que $\mu = 49$, como sabemos que la media poblacional verdadera es 50, estamos aceptando algo falso (error de tipo II).

(3) a) $H_0 : \mu = 50$ $\qquad$ b) $\alpha = 0,05$
$H_a : \mu \neq 50$ $\qquad$ c) $\sigma = 10$

$$d)\quad Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{49,75-50}{10/\sqrt{16}} = -0,10$$

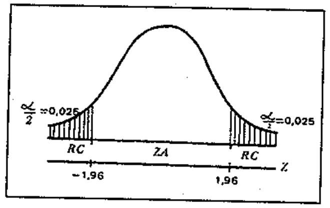
$Z = -0,10$ se ubica en la zona de aceptación. No hay error, ya que aceptamos algo verdadero (μ = 50)



(4) a) $H_0 : \mu = 51$ b) $\propto$ = 0,05
$H_a : \mu \neq 51$ c) σ = 10

$$d)\quad Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{49,75-51}{10/\sqrt{16}} = -0,50$$

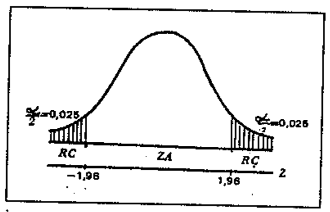
Z = −0,50 se ubica en la región de aceptación. El error es de tipo II, ya que aceptamos algo falso



(5) a) $H_0 : \mu = 60$ b) $\propto$ = 0,05
$H_a : \mu \neq 60$ c) σ = 10

$$d)\quad Z = \frac{49,75-60}{10/\sqrt{16}} = -4,10$$

No hay error, se rechaza algo falso



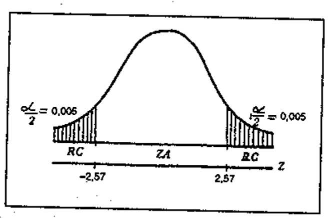
2. De la «poblacional normal» mencionada en el ejercicio anterior, se extrajo una muestra aleatoria de 25 observaciones cuya media muestral es de 54. Empleando los niveles de significación del 1% y del 5%, docimar ó probar la hipótesis donde la media poblacional sea: a) 50 b) 49.

Observación: Se trata de cuatro dócimas. En cada una de ellas calcular el valor de Z y adoptar la decisión.

Solución:

(1) *A) Cuando* $\propto$ = 0,01

a) $H_0 : \mu = 50$ b) $\propto$ = 0,01
$H_a : \mu \neq 50$ c) σ = 10



$$d)\quad Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{54-50}{10/\sqrt{25}} = 2$$

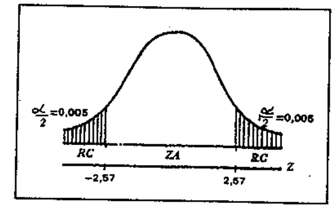
$0,5000 - 0,005 = 0,4950$

$A(\,0,4950 \rightarrow Z = 2,57\,)$

e) Se ubica en la zona de aceptación. No hay error

(2) a) $H_0 : \mu = 49$ b) $\propto$ = 0,01
$H_a : \mu \neq 49$ c) $\sigma = 10$

$$d)\quad Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{54-49}{10/\sqrt{25}} = 2,5$$

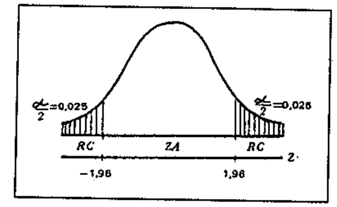


e) Hay error de tipo II, se acepta algo falso.

B) Ahora cuando $\propto$ = 0,05

(1) a) $H_0 : \mu = 50$ b) $\propto$ = 0,05
$H_a : \mu \neq 50$ c) σ = 10

$$d)\quad Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{54-50}{10/\sqrt{25}} = 2$$

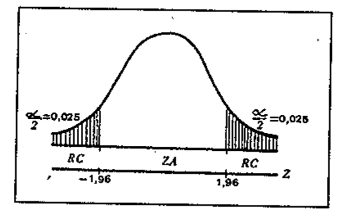


e) Se ubica en la zona de rechazo. Se comete un error de tipo I por rechazar algo verdadero

(2) a) $H_0 : \mu = 49$ b) $\propto$ = 0,05
$H_a : \mu \neq 49$ c) σ = 10

$$d)\quad Z = \frac{54-49}{10/\sqrt{25}} = 2,5$$

e) Se ubica en la zona rechazo. No hay error.

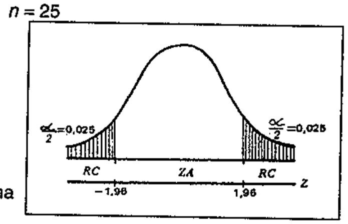


3. Dado $\bar{x} = 82$ $\sigma = 15$ $n = 25$
docimar la hipótesis: $\mu = 86$

Solución: $\bar{x} = 82$ $\sigma = 15$ $n = 25$

a) $H_0 : \mu = 86$ b) $\propto$ = 0,05
$H_a : \mu \neq 86$ c) σ = 15

$$d)\quad Z = \frac{82-86}{\frac{15}{\sqrt{25}}} = \frac{-4(5)}{15} = \frac{-20}{15} = -1,33$$

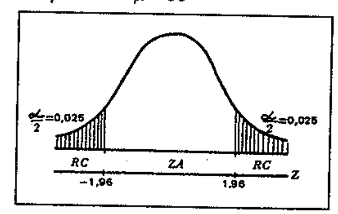


e) Aceptamos que $\mu = 86$, ya que −1,33 se ubica en la zona de aceptación.

4. Dado $\bar{x} = 82$ $s = 15$ $n = 100$ *docimar la hipótesis:* $\mu = 86$

Solución: $\bar{x} = 82$ $s = 15$ $n = 100$

a) $H_0 : \mu = 86$ b) $\propto$ = 0,05
$H_a : \mu \neq 86$ c) s = 15



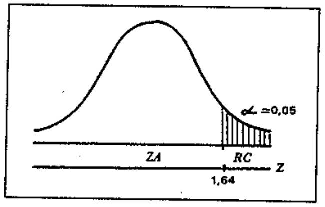
$$d)\quad Z = \frac{82-86}{15/\sqrt{100}} = \frac{-4(10)}{15} = \frac{-40}{15} = -2,66$$

e) Rechazamos la hipótesis de que $\mu = 86$; por lo tanto aceptamos que $\mu \neq 86$; al nivel del 5%.

5. Muchos años de experiencia en un examen de ingreso a la universidad en inglés arroja una calificación promedio de 64, con una desviación estándar de 8. Todos los estudiantes de cierta ciudad, en la cual existen 64, han obtenido una calificación promedio de 68. ¿Puede tenerse la certeza de que los estudiantes de esta ciudad son superiores en inglés?

Solución: $\mu = 64$ $\sigma = 8$ $n = 64$ $\bar{x} = 68$

a) $H_0 : \mu = 64$ b) $\alpha = 0{,}05$
$H_a : \mu > 64$ c) $\sigma = 8$



d) $Z = \dfrac{68 - 64}{8 / \sqrt{64}} = \dfrac{4(8)}{8} = 4$

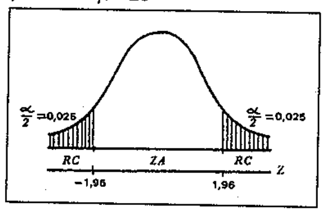
e) Z= 4 Se ubica en la zona de rechazo (4 > 1,64) por lo tanto puede tenerse la certeza, con un nivel de significación del 5%, que los estudiantes de esta ciudad son superiores en inglés.

6. Docimar la hipótesis de que la distancia media requerida para poder detener un automóvil que va a 20 K/h. es de 25 metros. Con base en una muestra de 100 conductores se obtiene que la distancia media es $\bar{x} = 27{,}3$ metros, con una desviación estándar de $s = 2{,}1$ metros. Utilizar un nivel de significación del 5 %.

Solución: $n = 100$ $\bar{x} = 27{,}3$ $s = 2{,}1$ $\alpha = 0{,}05$ $\mu = 25$

a) $H_0 : \mu = 25$ b) $\alpha = 0{,}05$
$H_a : \mu \neq 25$ c) $s = 2{,}1$

d) $Z = \dfrac{27{,}3 - 25}{2{,}1 / \sqrt{100}} = \dfrac{23}{2{,}1} = 10{,}95$



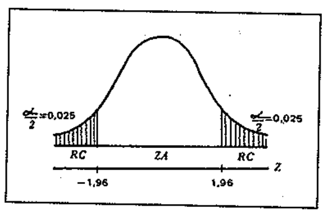
e) La distancia media requerida es diferente a 25 mts, al nivel del 5 %

7. Dado $\bar{x} = 86$; $s = 12$ y $n = 100$, docimar la hipótesis $\mu = 80$ frente a la alternativa bilateral $\mu \neq 80$, al nivel de significación del 5 %.

Solución: $\mu = 80$ $\bar{x} = 86$ $s = 12$ $n = 100$ $\alpha = 0{,}05$

a) $H_0 : \mu = 80$ b) $\alpha = 0{,}05$
$H_a : \mu \neq 80$ c) $s = 12$

d) $Z = \dfrac{86 - 80}{12 / \sqrt{100}} = \dfrac{60}{12} = 5$

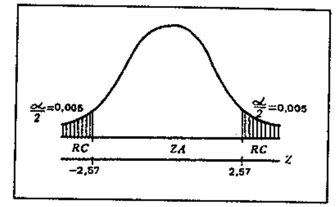


e) Se rechaza la hipótesis de que $\mu = 80$ y se acepta la alternativa de que $\mu \neq 80$.

8. Cuatrocientos estudiantes, elegidos aleatoriamente, se someten a un "test" de rendimiento, obteniéndose los siguientes resultados: $\bar{x} = 76$ y $s = 16$, con base en esta información docimar la hipotesis $\mu = 74$ frente a la alternativa $\mu \neq 74$, al nivel de significación del 1%.

Solución: $\bar{x} = 76$ $s = 16$ $n = 400$

a) $H_0 : \mu = 74$ b) $\alpha = 0{,}01$
$H_a : \mu \neq 74$ c) $s = 16$



d) $Z = \dfrac{76 - 74}{16 / \sqrt{400}} = \dfrac{2(20)}{16} = 2{,}5$

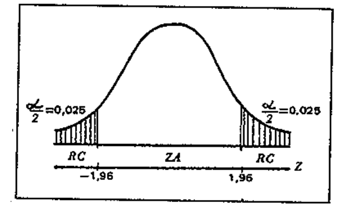
e) Se ubica en la zona de aceptación; aceptamos que $\mu = 74$, al nivel del 1%.

9. Dado $\bar{x} = 23{,}5$; $\sigma = 1{,}2$ y $n = 25$, docimar la hipótesis $\mu = 22$ frente a la alternativa $\mu \neq 22$, al nivel de significación del 5 %.

Solución: $\bar{x} = 23{,}5$ $\sigma = 1{,}2$ $n = 25$

a) $H_0 : \mu = 22$ b) $\alpha = 0{,}05$
$H_a : \mu \neq 22$ c) $\sigma = 1{,}2$

d) $Z = \dfrac{23{,}5 - 22}{1{,}2 / \sqrt{25}} = \dfrac{7{,}5}{1{,}2} = 6{,}25$



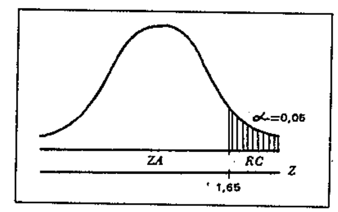
e) Rechazamos la hipótesis de que $\mu = 22$ y aceptamos de que $\mu \neq 22$, al nivel del 5%.

10. Una encuesta revela que los 100 autos particulares, que constituyen una muestra aleatoria, se condujeron a un promedio de 12.500 km. durante un año, con una desviación estándar de 2.400 km. Con base en esta información, docimar la hipótesis donde, en promedio, los autos particulares se condujeron a 12.000 km. durante un año, frente a la alternativa de que el promedio sea superior. Utilizar el nivel de significación del 5%.

Solución: $n = 100$ $\bar{x} = 12.500$ $s = 2.400$

a) $H_0 : \mu = 12.000$ b) $\alpha = 0{,}05$
$H_a : \mu > 12.000$ c) $s = 2.400$

d) $Z = \dfrac{12.500 - 12.000}{2.400 / \sqrt{100}} = 2{,}083$



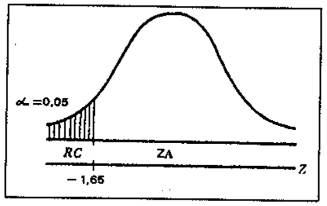
e) Rechazamos la hipótesis de que $\mu = 12.000$, luego aceptamos que los autos se condujeron en un promedio superior durante ese año, al nivel del 5%.

11. Una muestra aleatoria de zapatos (n = 40) usados por los soldados en campaña en un desierto revela una vida media de 1,08 años, con una desviación estándar de 0,5 años. Se sabe que en condiciones normales dichos zapatos tienen una vida media de 1,28 años. Al nivel de significación del 5%, ¿hay razón para sostener que la disminución de la vida media de los zapatos se debe a su uso en el desierto?

Solución: $n = 40$ $\mu = 1{,}28$ $\bar{x} = 1{,}08$ $s = 0{,}5$

a) $H_0 : \mu = 1{,}28$ b) $\alpha = 0{,}05$
$H_a : \mu < 1{,}28$ c) $s = 0{,}5$

d) $Z = \dfrac{1{,}08-1{,}28}{0{,}5/\sqrt{40}} = \dfrac{-0{,}20\sqrt{40}}{0{,}5} = \dfrac{6{,}32(-0{,}20)}{0{,}5} = -2{,}528$



e) Rechazamos que $\mu = 1{,}28$. Si hay razón para sostener que la disminución de la vida media de los zapatos se debe a su uso en el desierto, al nivel del 5%.

12. Un fabricante de cuerdas ha establecido con base en una experiencia de muchos años, que las cuerdas tienen una fuerza de ruptura de 15,9 libras, con una desviación estándar de 2,3 libras. Se efectúa un cambio en el proceso de fabricación, y se obtiene una muestra de 64 artículos cuya fuerza media de ruptura es de 15,0 libras, con una desviación estándar de 2,2 libras. ¿Debe considerarse que el nuevo proceso tiene un efecto significativamente negativo respecto a la resistencia de las cuerdas?

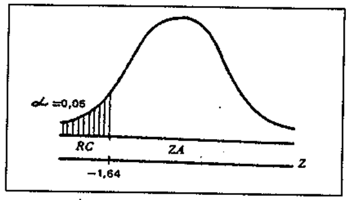
Solución: $\mu = 15{,}9$ $\sigma = 2{,}3$ $n = 64$ $\bar{x} = 15$ $s = 2{,}2$

a) $H_0 : \mu = 15{,}9$
$H_a : \mu < 15{,}9$

b) $\propto = 0{,}05$
c) $\sigma = 2{,}3$

d) $Z = \dfrac{15-15{,}9}{2{,}3/\sqrt{64}} = \dfrac{-0{,}9(8)}{2{,}3} = -3{,}13$

(*se trabaja con σ en vez de s*)



e) Se ubica en la región de rechazo; por lo tanto aceptamos que el nuevo proceso tiene un efecto significativamente negativo, respecto a la resistencia de las cuerdas, al nivel del 5%.

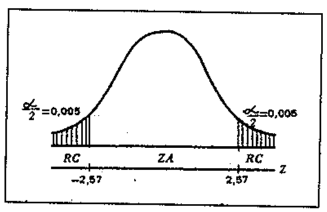
13. Un fabricante sostiene que sus autos consumen en promedio 5,50 galones cada 100 kilómetros. Un vendedor de la compañía comprueba el consumo de gasolina de 35 autos, y encuentra que el consumo medio de ese grupo es de 5,65 galones cada 100 kilómetros, con una desviación estándar de 0,35 galones. Con estos datos, ¿puede dudarse de lo sustentado por la compañía? (nivel del 1%)

Solución: $\mu = 5{,}5$ $n = 35$ $\bar{x} = 5{,}65$ $s = 0{,}35$ $\propto = 1\%$

a) $H_0 : \mu = 5{,}5$
$H_a : \mu \neq 5{,}5$

b) $\propto = 0{,}01$
c) $s = 0{,}35$

d) $Z = \dfrac{5{,}65-5{,}5}{0{,}35/\sqrt{35}} = \dfrac{0{,}15(5{,}92)}{0{,}35} = 2{,}54$



e) No debe dudarse de lo sustentado por la compañía, al nivel de significación del 1%.

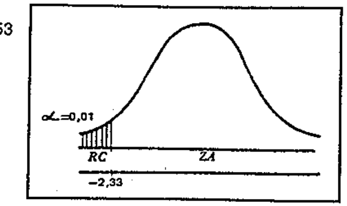
14. Los salarios diarios en un sector de la industria están distribuidos normalmente con una media de \$13.200 y una desviación estándar de \$2.500. Si una empresa del sector, que cuenta con 40 obreros, paga, en promedio, \$12.200, ¿puede decirse que esta compañía paga salarios inferiores al nivel de la significación del 1%?

Solución: $\mu = 13.200$ $\sigma = 2.500$ $n = 40$ $\bar{x} = 12.200$

a) $H_0 : \mu = 13.200$
$H_a : \mu < 13.200$

b) $\propto = 0{,}01$
c) $\sigma = 2.500$

d) $Z = \dfrac{12.200-13.200}{2.500/\sqrt{40}} = \dfrac{-1.000(6{,}33)}{2.500} = \dfrac{-6.330}{2.500} = -2{,}53$



e) Se ubica en la región de rechazo, por lo tanto, se puede acusar a la compañía de pagar salarios inferiores, al nivel del 1%.

15. Un investigador asegura que el gasto promedio semanal de las familias de una determinada región en alimentación es de \$31.000. Con base en los siguientes resultados para la variable X (gastos semanales). $\bar{x} = 30.600$ $s = 900$ $n = 100$

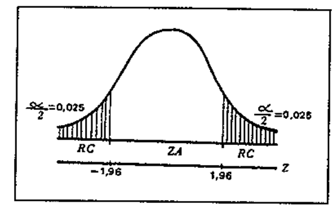
¿Con el nivel de significación del 5% se puede aceptar lo que dice el investigador?

Solución: $\mu = 31.000$ $n = 100$ $\bar{x} = 30.600$ $s = 900$

a) $H_0 : \mu = 31.000$
$H_a : \mu \neq 31.000$

b) $\propto = 0{,}05$
c) $s = 900$

d) $Z = \dfrac{30.600-31.000}{900/\sqrt{100}} = \dfrac{-400(10)}{900} = -4{,}44$



e) Se rechaza la hipótesis de que $\mu = 31.000$, es decir, que no podemos aceptar lo que dice el investigador, al nivel del 5%.

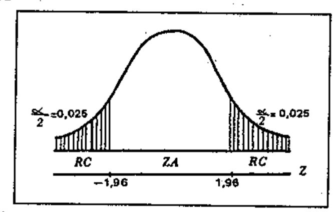
16. Un distribuidor de botas especiales de trabajo le garantiza al jefe de una empresa que el promedio de duración de las botas es de 8 meses con una desviación típica de mes y medio. El cliente de la empresa decide comprar 36 pares de botas, que en promedio duran 8 meses 10 días. ¿Tiene razón el fabricante con un nivel de significación del 5%?

Solución: $\mu = 8$ $\sigma = 1{,}5$ $n = 36$ $\bar{x} = 8{,}33$

a) $H_0 : \mu = 8$
$H_a : \mu \neq 8$

b) $\propto = 0{,}05$
c) $\sigma = 1{,}5$

d) $Z = \dfrac{8{,}33-8}{1{,}5/\sqrt{36}} = \dfrac{0{,}33(6)}{1{,}5} = \dfrac{1{,}98}{1{,}50} = 1{,}32$



e) Aceptamos que el fabricante tiene razón, al nivel del 5%.

17. Una compañía que vende camarón congelado inprime sobre el envase: "contiene 14 onzas". Una muestra de 25 envases da una media de 13,83 onzas. De las experiencias anteriores se deduce que la población del peso de los envases tiene una desviación típica de 0,5 onzas. Utilizando un nivel de significación del 5%, ¿se puede aceptar lo ofrecido por la empresa?

Solución: $\mu = 14$ $n = 25$ $\bar{x} = 13{,}83$ $\sigma = 0{,}5$ $\propto = 0{,}05$

a) $H_0 : \mu = 14$
$H_a : \mu \neq 14$

b) $\propto = 0{,}05$
c) $\sigma = 0{,}5$